08/11/2016

Μάθημα 11ο

Πιθανότητες

Διωνυμική Κατανομή

Επανάληψη

Διωνυμικό Τ.Π.

(Δ1) n-επαναλήψεις μιας στοιχειώδους διαδικασίας

(Δ2) Κάθε επανάληψη $\left\langle \begin{matrix} E \\ A \end{matrix} \right.$

Ενδιαφέρει X = πλήθος E στις n-επαναλήψεις

Τιμές της τ.μ. X : $x = 0,1,2,\ldots,n$

σ.π. της X : $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $x = 0,1,2,\ldots,n$

$p = P(E)$, $q = 1-p = P(A)$

(Δ3) Οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες

(Δ4) Η $P(E)$ παραμένει αμετάβλητο και ίσο με p.

X ← διωνυμική τυχαία μεταβλητή

$p_X(x)$ ← Διωνυμική κατανομή

$X \sim B(n,p)$

Παράδειγμα

① Ζάρι 3 φορές

(α) P (ακριβώς 3 φορές να εμφανιστεί αποτέλεσμα 7,4)

(β) P (το πολύ μια φορά να εμφανιστεί αποτέλεσμα 7,4)

n ρίψεις → $n=3$

$E = \{$ αποτέλεσμα οποιασδήποτε ρίψης 7,4 $\}$

X = πλήθος των φορών που εμφανίστηκε αποτελ. 7,4 στις 3 ρίψεις =
= πλήθος E στις 3 ρίψεις

$X \sim B(n=3,\ p=P(E)=1/2)$

$p = P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ← αμετάβλητη ίδια

↳ είναι και ανεξάρτητη. Άρα διωνυμική κατανομή

$$\Rightarrow P_X(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \quad , x=0,1,2,3$$

(α) $P(X=3) \overset{\text{ορ}}{=} P_X(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \dots$

(β) $P(X \leq 1) = P(X=0$ ή $X=1) = P(X=0) + P(X=1) =$

$= P_X(0) + P_X(1) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \dots$

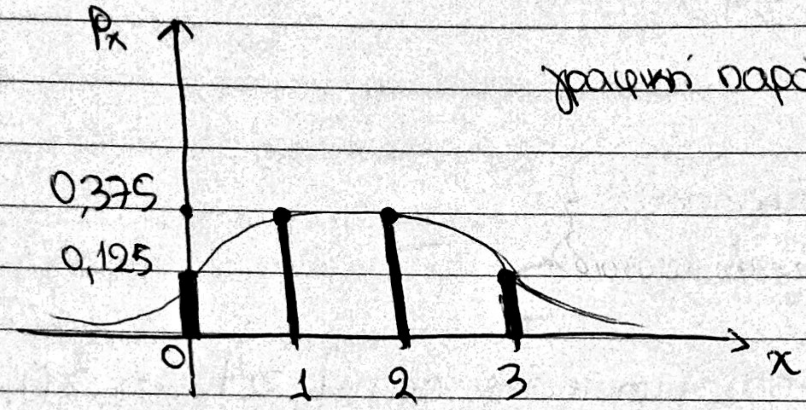
Παρατηρήσεις

① Πιθανότητες της μορφής $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$

ονομάζονται Διωνυμικές Πιθανότητες

→ Πίνακας Διωνυμικής Κατανομής

② γραφική παράσταση



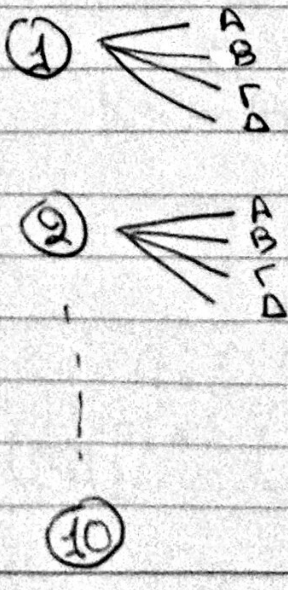
Παράδειγμα

10 ερωτήσεις → 4 απαντήσεις

Φοιτητής απαντά στην τύχη

Σωστή απάντηση → 1 μονάδα

P (πέρασε), P (πάρει 10), P (μηδέν)



$n = 10$ επαναλήψεις

Επανάληψη $\begin{cases} \text{Σωστό} \leftarrow E \\ \text{Λάθος} \end{cases}$

X ~ πλήθος των E = πλήθος σωστών απαντήσεων

$X \sim B\left(n=10,\ p = P(E) = 1/4\right)$

$$p_X(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}, \quad x = 0, \dots, 10$$

$$P(\text{πέρασες}) = P(X \geq 5) = \sum_{x \geq 5} p_X(x) = \sum_{x=5}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} =$$

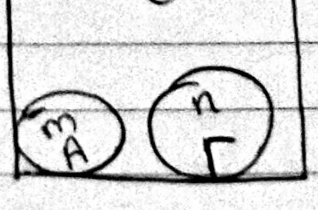
$$= 0{,}0781 = 7{,}81\%$$

$$P(\text{Δέκα}) = P(X=10) = p_X(10) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-10} \simeq 0$$

$$P(\text{μηδέν}) = P(X=0) = p_X(0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-0} = 0{,}0563$$

<u>Παράδειγμα</u>

Πληθυσμός $\begin{cases} \to m \text{ Άνδρες} \\ \to n \text{ Γυναίκες} \end{cases}$



<u>με επανάθεση</u>

$$P\left(\begin{array}{l}\text{να υπάρχουν ακριβώς} \\ \text{κ-άνδρες στο δείγμα} \\ \text{μεγέθους } r\ (0 \leq k \leq r)\end{array}\right) = \frac{\binom{r}{k} m^k \cdot n^{r-k}}{(m+n)^r} = P(A)$$

$$\delta_X \quad \overbrace{\frac{m}{m+n}\ \frac{m}{m+n}\cdots\frac{m}{m+n}}\ \Big|\ \frac{n}{m+n}\ \frac{n}{m+n}\cdots\frac{n}{m+n}$$

↑

κ-θέση

r-επαναλήψεις

E = { άνδρες }

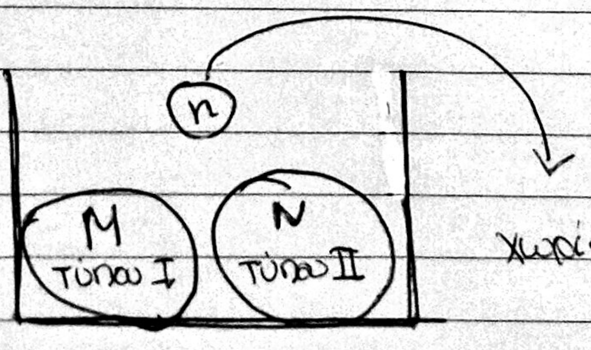
Έστω X πλήθος Ανδρών στις r

$$X \sim B\left(r,\ p = P(E) = \frac{m}{m+n}\right)$$

Επανάθεση ⟵ Εξασφαλίζει αμετάβλητη P(E)

Άρα $P(A) = P(X=k) = p_X(k) = \binom{r}{k}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k\left(1-\frac{m}{m+n}\right)^{r-k}$

<u>Υπεργεωμετρική Κατανομή</u>



χωρίς επανάθεση.

Έστω ενδιαφέρει:

X = πλήθος του τύπου I στα n που επέλεξα

X τ.μ.

<u>Τιμές</u> x = 0, 1, 2, ..., n

(από πρώτη άποψη)

$$p_X(x) = P(X=x) = P\left(\begin{array}{l}\text{Στα } n \text{ που επιλέχθηκαν}\\ \text{χωρίς επανάθεση τα } x\\ \text{να είναι τύπου I,}\\ n-x \text{ να είναι τύπου II}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{\binom{M}{x} \times \binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}$$

Η $p_X(x)$ θέλω να είναι συνάρτηση πιθανότητας δηλ:
(i) $p_X(x) \geq 0$
(ii) $\sum_x p_X(x) = 1$.

Οι (i) και (ii) ικανοποιούνται για $\max\{0, n-N\} \leq x \leq \min\{M, n\}$
$x \in \mathbb{N}$.

<u>Ορισμός</u>
Η τ.μ. X λέγεται υπεργεωμετρική με παραμέτρους M, N και n φυσικούς με $n \leq M+N$ αν οι δυνατές τιμές της X είναι τα $x \in \mathbb{N}$ με $\max\{0, n-N\} \leq x \leq \min\{M, n\}$ και η σ.π. της X δίνεται:

$$p_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N}{n-x}}{\binom{M+n}{n}}$$

<u>Συμβολισμός</u>: $X \sim Hg(M, N, n)$